

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра транспортних технологій

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ
ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ
“ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ”**
*(для студентів 4 курсу усіх форм навчання
спеціальності*
6.070101 *“Транспортні технології” (автомобільний транспорт))*

Тернопіль, 2016

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Основи теорії транспортних процесів та систем“ для студентів 4 курсу денної форми навчання 6.070101 «Транспортні технології» (автомобільний транспорт)) / Укл.: Ю.Я. Вовк, В.О. Дзюра, П.В. Попович, І.П. Вовк, О.П. Цьонь, О.С. Шевчук. – Тернопіль: СтереoАрт, 2016. – 38 с.

Укладачі: Ю. Я. Вовк, В.О. Дзюра, П.В. Попович, Вовк І.П., Цьонь О.П., Шевчук О.С.

Рецензент: д.т.н., проф. Ляшук О.Л.

Рекомендовано кафедрою транспортних технологій, протокол № 1 від 05.09.16 р.

Мета цих методичних вказівок - допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал курсу на практичних заняттях, виконуючи запропоновані завдання.

Виконання завдань являє собою вирішення задач, що виникають у реальному транспортному процесі.

Ці завдання охоплюють основні розділи курсу.

У процесі виконання завдань студенти глибше опановують методи й послідовність системного дослідження транспортних об'єктів, засобів визначення структури зовнішнього середовища та моделі транспортних систем.

Завдання виконують згідно з варіантами у зошиті з допоміжними розрахунками. У кінці кожного завдання необхідно зробити відповідні висновки.

Заняття 1

ПРОГНОЗУВАННЯ ОБСЯГУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА ЗА ДОПОМОГОЮ «МОДЕЛІ РОЗВИТКУ»

Мета заняття - перевірити ступінь освоєння питань, що викладаються в лекційному курсі за цією темою.

Завдання. *Визначити прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою „моделі розвитку”.*

Вихідні дані наведені в табл.. 1.1 і 1.2. З табл. 1.1 вихідні дані обирають за першою цифрою варіанта, а з табл.. 1.2 – за другою цифрою. Номер варіанта студенту дає викладач.

Таблиця 1.1 – Обсяг перевезень за роками (Q), тис. т.

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	162	130	178	214	136	144	122	133	129	118
2	208	152	168	126	158	146	131	162	151	123
3	186	170	134	202	129	148	138	184	150	135
4	190	165	152	168	153	139	152	180	160	141
5	190	153	130	139	184	201	163	142	155	185

Таблиця 1.2 – Обсяг перевезень за роками (Q), тис. т.

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	210	168	144	167	214	210	145	141	168	173
7	213	152	138	158	170	206	152	143	172	178
8	206	165	143	173	190	216	157	151	167	181
9	194	158	133	148	186	208	160	150	160	183
10	214	163	176	170	167	151	149	191	158	139

Вказівки до виконання завдання

1. Знайти вид тренду тимчасового ряду за допомогою рівняння прямої:

$$Q = a_0 + a_1 \cdot t \quad (1.1)$$

де Q – обсяг перевезень, тис. т.; a_0 , a_1 – коефіцієнти моделі; t – номер року, шт.

Тренд – це лінія, яка відображає тенденцію розвитку досліджуваного параметра. У нашому випадку таким параметром є обсяг перевезень автотранспортного підприємства.

Коефіцієнти a_0 і a_1 відшукати за допомогою розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n Q_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i \end{cases}, \quad (1.2)$$

де n - кількість звітних даних.

2. Знайти вид тренду тимчасового ряду за допомогою рівняння параболи:

$$S = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2, \quad (1.3)$$

де b_0, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти b_0, b_1 і b_2 відшукати за допомогою розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^4 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i^2 \end{cases}, \quad (1.4)$$

Показники, необхідні для розрахунку коефіцієнтів навести у табличному вигляді (див табл. 1.4).

3. Побудувати графіки отриманих функцій в одній системі координат, тут же зазначити точки, що відповідають звітним даним.

4. Визначити середню помилку апроксимації для обох моделей за формулою

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q_i''|}{n}, \quad (1.5)$$

де Q_i – вихідні дані обсягу перевезень i -го року, тис. т.; Q_i'' – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане із застосуванням „моделі розвитку”, тис. т.

5. На підставі середньої помилки апроксимації вибрати найбільше підходящу для прогнозування модель. Визначити прогнозне значення обсягу перевезень у $n+1$ року за цією моделлю.

6. Зробити висновки за результатами роботи.

Приклад.

Завдання. Виконати прогноз обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі „розвитку” за звітними даними, наведеними, у табл. 3.

Таблиця 1.3 – Звітні дані автотранспортного підприємства

Номер року (t), шт.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Обсяг перевезень (Q), тис. т.	162	208	186	190	190	210	206	216	208	151
----------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Вирішення:

1. Знайдемо значення тренда, вирішивши рівняння (1.1).

Для цього необхідно визначити коефіцієнти a_0 , a_1 , які знаходять за допомогою вирішення системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i = \sum_{i=1}^{10} Q_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i^2 = \sum_{i=1}^{10} Q_i \cdot t_i \end{cases} \quad (1.6)$$

Показники, які необхідні для розрахунку коефіцієнтів a_0 , a_1 , подамо у табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Показники для розрахунку коефіцієнтів моделі

№ п/п	Позначення показника										
	t_i	Q_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$Q_i \cdot t_i$	$Q_i \cdot t_i^2$	$Q_i^{\text{пр}}$	$Q_i^{\text{пар}}$	$ Q_i - Q_i^{\text{пр}} $	$ Q_i - Q_i^{\text{пар}} $
1	1	162	1	1	1	162	162	189,5	167,7	27,55	5,68
2	2	208	4	8	16	416	832	190,3	182,9	17,75	25,1
3	3	186	9	27	81	558	1674	190,9	194,5	4,95	8,5
4	4	190	16	64	256	760	3040	191,7	202,5	1,65	12,5
5	5	190	25	125	625	950	4750	192,3	206,8	2,35	16,8
6	6	210	36	216	1296	1260	7560	193,1	207,6	17,0	2,4
7	7	206	49	343	2401	1442	10094	193,7	204,6	12,25	1,4
8	8	216	64	512	4096	1728	13824	194,4	198,1	21,55	17,9
9	9	208	81	729	6561	1872	16848	195,1	187,9	12,85	20,1
10	10	151	100	1000	10000	1510	15100	195,8	174,1	44,85	23,1
Σ	55	1927	385	3025	25333	10658	73884	1733,7	1926,6	162,75	133,4

Систему рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{cases} 10 \cdot a_0 + 55 \cdot a_1 = 1927 \\ 55 \cdot a_0 + 385 \cdot a_1 = 10658 \end{cases}$$

Рішенням цієї системи будуть значення коефіцієнтів $a_0=0,7$, $a_1=188,7$, а рівняння тренду буде таким:

$$Q^{\text{пр}} = 188,8 + 0,7 \cdot t.$$

Знайдемо значення обсягу перевезень за лінійною моделлю і побудуємо відповідний графік (див. рис. 1):

$$\begin{aligned}
Q^{np}(t_1) &= 188,8 + 0,7 \cdot 1 = 189,55; & Q^{np}(t_6) &= 188,8 + 0,7 \cdot 6 = 193,05; \\
Q^{np}(t_2) &= 188,8 + 0,7 \cdot 2 = 190,25; & Q^{np}(t_7) &= 188,8 + 0,7 \cdot 7 = 193,75; \\
Q^{np}(t_3) &= 188,8 + 0,7 \cdot 3 = 190,95; & Q^{np}(t_8) &= 188,8 + 0,7 \cdot 8 = 194,45; \\
Q^{np}(t_4) &= 188,8 + 0,7 \cdot 4 = 191,65; & Q^{np}(t_9) &= 188,8 + 0,7 \cdot 9 = 195,15; \\
Q^{np}(t_5) &= 188,8 + 0,7 \cdot 5 = 192,35; & Q^{np}(t_{10}) &= 188,8 + 0,7 \cdot 10 = 195,85.
\end{aligned}$$

2. Знайдемо вид тренда, вирішивши рівняння параболи (1.3). Згідно з формулою (1.4) визначають показники, які заносять до табл. 4 і використовують при складанні системи рівнянь (1.7). Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходять коефіцієнти b_0 , b_1 , b_2 :

$$\begin{cases} 10 \cdot b_0 + 55 \cdot b_1 + 385 \cdot b_2 = 1927 \\ 55 \cdot b_0 + 385 \cdot b_1 + 3025 \cdot b_2 = 10658 \\ 385 \cdot b_0 + 3025 \cdot b_1 + 25333 \cdot b_2 = 73884 \end{cases} \quad (1.7)$$

Значення коефіцієнтів дорівнює $b_0=148,8$; $b_1=20,7$; $b_2=-1,82$ а рівняння тренду буде таким:

$$Q^{nap} = 148,8 + 20,7 \cdot t - 1,82 \cdot t^2.$$

Знайдемо значення обсягу перевезень за квадратичною моделлю і побудуємо відповідний графік (див. рис. 1):

$$\begin{aligned}
Q^{nap}(t_1) &= 148,8 + 20,7 \cdot 1 - 1,82 \cdot 1^2 = 167,68; \\
Q^{nap}(t_3) &= 148,8 + 20,7 \cdot 3 - 1,82 \cdot 3^2 = 194,5; \\
Q^{nap}(t_4) &= 148,8 + 20,7 \cdot 4 - 1,82 \cdot 4^2 = 202,5; \\
Q^{nap}(t_5) &= 148,8 + 20,7 \cdot 5 - 1,82 \cdot 5^2 = 206,8; \\
Q^{nap}(t_6) &= 148,8 + 20,7 \cdot 6 - 1,82 \cdot 6^2 = 207,6; \\
Q^{nap}(t_7) &= 148,8 + 20,7 \cdot 7 - 1,82 \cdot 7^2 = 204,6; \\
Q^{nap}(t_8) &= 148,8 + 20,7 \cdot 8 - 1,82 \cdot 8^2 = 198,1; \\
Q^{nap}(t_9) &= 148,8 + 20,7 \cdot 9 - 1,82 \cdot 9^2 = 187,9; \\
Q^{nap}(t_{10}) &= 148,8 + 20,7 \cdot 10 - 1,82 \cdot 10^2 = 174,1.
\end{aligned}$$

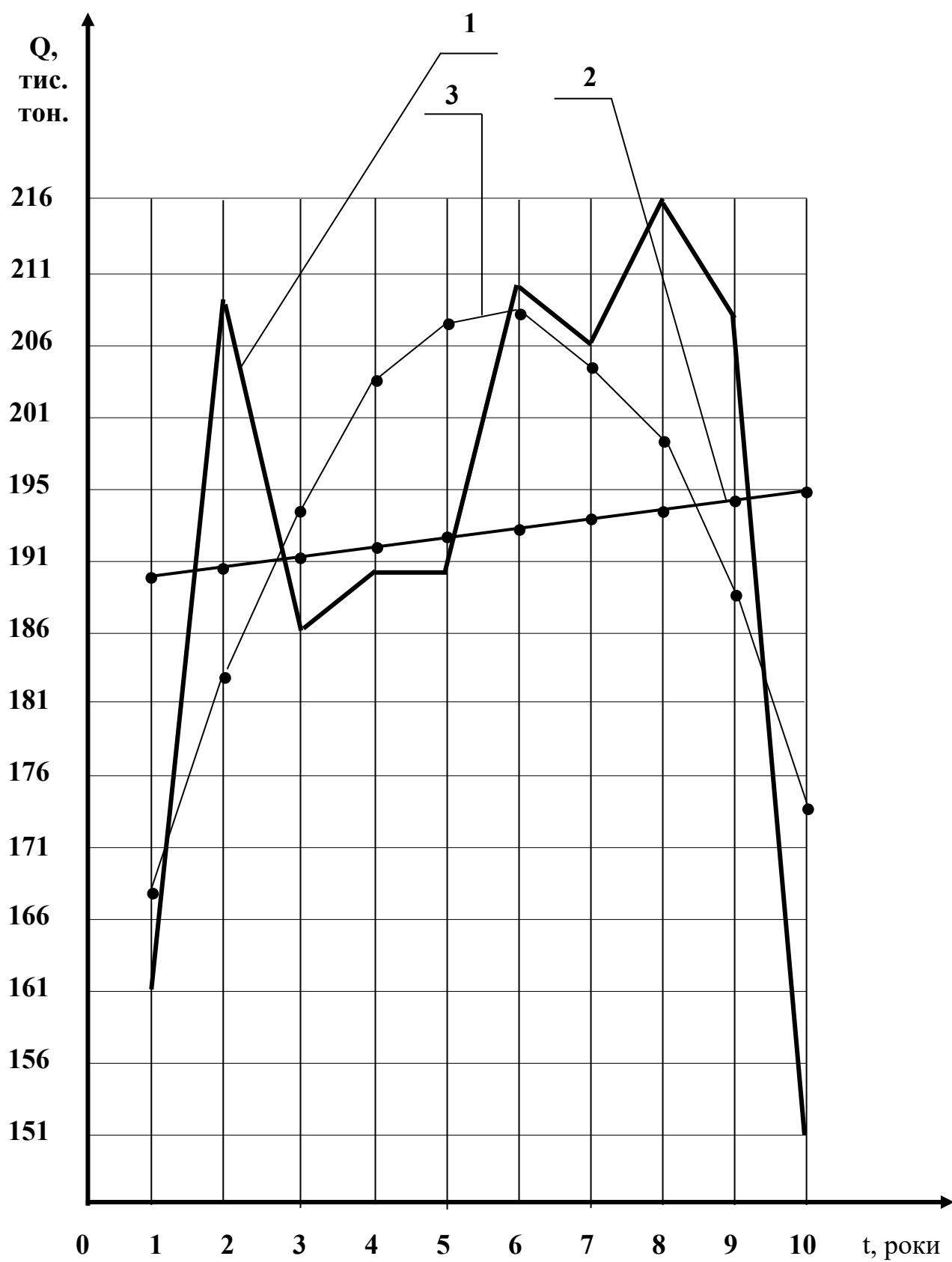


Рис. 1 – Графічне відображення трендів:
1 – крива звітних даних; 2 – тренд прямої; 3 – тренд параболі.

3. Визначимо середню помилку апроксимації для обох моделей за формулою (1.5):

$$\varepsilon^{\text{np}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i^{\text{н}}|}{10} = \frac{|162 - 189,55| + |208 - 190,25| + |186 - 190,95| + |190 - 191,65| + |190 - 192,35| + |210 - 193,05| + |206 - 193,75| + |216 - 194,45| + |208 - 195,15| + |151 - 195,85|}{10} = 16,27;$$

$$\varepsilon^{\text{nap}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i^{\text{н}}|}{10} = 13,34.$$

4. На підставі середньої помилки апроксимації обираємо найбільш підходящу для прогнозування модель. Цією моделлю буде та модель, яка має найменшу помилку апроксимації. Такою моделлю є параболічна функція. За квадратичною „*моделлю розвитку*” знайдемо прогнозне значення обсягу перевезень у $n+1$ році:

$$Q^{\text{nap}}(t_{11}) = 148,8 + 20,7 \cdot 11 - 1,82 \cdot 11^2 = 156,67 \text{ тис.т.}$$

5. Висновки за результатами роботи.

Запитання для самоперевірки

1. Як Ви розумієте термін „*модель розвитку*”?
2. Принцип математичного способу отримання трендів тимчасового ряду.
3. Як значення розміру середньої помилки апроксимації впливає на вибір моделі прогнозування?
4. Записати рівняння лінійної та квадратичної „*моделі розвитку*”.
5. Принцип графічного способу отримання тренду моделі?
6. Що повинна вміщувати „*модель розвитку*”?
7. До яких регресійних моделей відносять „*модель розвитку*”?
8. Які існують способи отримання трендів *моделі розвитку*”?
9. Що таке тренд „*моделі розвитку*”?

Заняття 2

ПРОГНОЗУВАННЯ ОБСЯГУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ «ПОПИТ – ПРОПОЗИЦІЯ»

Мета заняття - перевірити ступінь освоєння питань, що викладаються в лекційному курсі за цією темою.

Завдання. Знайти прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства за допомогою моделі „попит – пропозиція”.

Вихідними даними відповідно до заданого варіанта є: значення обсягу перевезень з 1-го завдання та обсяг виробництва в регіоні та значення тарифу за транспортну роботу, які приймають відповідно до даних, що наведені в таблицях 2.1 і 2.2. З табл. 2.1 вихідні дані вибирають за першою цифрою варіанта, з табл. 2.2 - за другою цифрою.

Таблиця 2.1 – Обсяг виробництва в регіоні (Р), тис. грн.

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	999	711	459	344	932	802	716	698	1919	931
2	998	763	521	402	916	805	722	691	1959	958
3	995	809	581	406	908	809	726	675	1981	975
4	989	756	639	431	905	802	728	653	1992	986
5	979	808	693	462	913	824	731	632	1996	992
6	963	842	742	463	926	833	732	616	1981	995
7	940	876	786	519	941	843	733	606	1947	996
8	909	870	825	525	955	853	734	602	1964	998
9	870	898	859	873	968	862	735	601	1934	999
10	823	921	863	583	978	859	736	600	1925	996

Таблиця 2.2 – Тариф за транспортну роботу (Т), коп./ т км.

Номер звітного року (t), шт.	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3,0	5,0	4,5	3,7	5,6	4,2	4,8	4,4	4,0	5,1
2	3,0	5,0	4,6	3,7	5,6	4,2	4,8	4,5	4,1	5,2
3	3,0	5,5	4,7	3,8	5,6	4,3	4,8	4,5	4,2	5,2
4	3,1	5,7	4,8	3,8	5,8	4,4	4,8	4,6	4,6	5,2
5	3,1	5,7	4,9	3,9	5,8	4,5	4,8	4,7	5,0	5,2
6	3,1	5,8	5,0	3,9	6,0	4,5	5,0	4,7	5,5	5,4
7	3,2	6,0	5,0	4,0	6,2	4,6	5,0	4,8	6,1	5,7
8	3,2	6,0	5,1	4,0	6,2	4,7	5,0	5,0	6,8	6,1
9	3,2	6,5	5,2	4,1	6,4	4,8	5,2	5,2	7,6	6,6
10	3,3	6,5	5,3	4,1	6,4	4,8	5,2	5,4	8,5	6,9

Вказівки до виконання завдання

1. Знайти вид двофакторної лінійної моделі „*попит – пропозиція*”:

$$Q = a_0 + a_1 P + a_2 T, \quad (2.1)$$

де a_0, a_2, a_3 – коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти a_0, a_2, a_3 відшукати за допомогою розв’язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n P_i + a_2 \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n Q_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n P_i + a_1 \sum_{i=1}^n P_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n P_i T_i = \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n T_i + a_1 \sum_{i=1}^n P_i T_i + a_2 \sum_{i=1}^n T_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i T_i \end{cases} \quad (2.2)$$

Показники, необхідні для розрахунку коефіцієнтів, навести в табличному вигляді.

2. Застосувати теорію кореляційного аналізу.

2.1 Розрахувати парні коефіцієнти кореляції між Q і P ($r_{Q/P}$), Q і T ($r_{Q/T}$), P і T ($r_{P/T}$) за формулою (2.3). Розрахунки проводити в табличній формі:

$$r_{x/y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (2.3)$$

де \bar{x}, \bar{y} – середнє значення величин x та y ; σ_x, σ_y – середньоквадратичне відхилення для досліджуваних величин x та y .

Для розрахунку за формулою (2.3) застосовують вирази

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n; \quad \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) / n; \quad \overline{x \cdot y} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right) / n \quad (2.4)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \quad (2.5)$$

Кореляційний аналіз дає можливість встановити напрямок і силу зв’язку досліджуваних величин один на одного.

Напрямок зв’язку визначають за алгебраїчним знаком коефіцієнта кореляції. Якщо він має позитивний знак – напрямок зв’язку прямий, при негативному – зворотний.

Силу зв’язку оцінюють за значенням величини коефіцієнта кореляції. При $r_{x/y} < 0,1$ немає зв’язку між параметрами, при $r_{x/y} = 0,1 - 0,19$ зв’язок вважають слабким, при $r_{x/y} = 0,3 - 0,69$ зв’язок визначають середнім (помірним), а при $r_{x/y} = 0,7 - 0,99$ сильним.

2.2 Визначити множинний коефіцієнт кореляції за формулою

$$R_{x/yz} = \sqrt{\frac{r_{x/y}^2 + r_{x/z}^2 - 2 \cdot r_{x/y} \cdot r_{y/z} \cdot r_{y/z}}{1 - r_{y/z}^2}}. \quad (2.6)$$

За результатами розрахунків зробити аналіз кореляційного зв'язку, який навести у висновках по роботі.

3. Визначити середню помилку апроксимації для моделі за формулою

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q_i''|}{n}, \quad (2.7)$$

де Q_i – вихідні дані обсягу перевезень i -го року, тис. т.; Q_i'' – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі „попит – пропозиція”, тис. т.

Показники, необхідні для розрахунку навести в табличному вигляді.

4. За допомогою отриманої моделі розрахувати прогнозне значення обсягу перевезень підприємства, якщо відомо, що обсяг виробництва в прогнозованому періоді збільшився на 5%, тобто P'' дорівнює

$$P'' = 1,05P_{10}. \quad (2.8)$$

Тариф у прогнозованому періоді T'' залишається на рівні останнього звітного року:

$$T'' = T_{10}. \quad (2.9)$$

5. Зробити висновки за результатами роботи стосовно аналізу кореляційного зв'язку між факторами моделі „попит-пропозиція” та перспективного обсягу перевезень.

Приклад.

Завдання. Знайти прогнозне значення обсягу перевезень автотранспортного підприємства з використанням моделі „попит – пропозиція” за звітними даними, наведеними у табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Звітні дані автотранспортного підприємства

Номер року (t), шт.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обсяг перевезень (Q), тис. т.	162	208	186	190	190	210	206	216	208	151
Обсяг виробництва (P), тис. грн.	999	998	995	989	979	963	940	990	870	823
Тариф за транспортну роботу (T), коп. / т км	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8

Вирішення:

1. Знаходимо значення тренду, вирішивши рівняння (2.1).

Для цього необхідно визначити коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 . Показники, які необхідні для розрахунку коефіцієнтів представимо у табл. 2.4.

Систему рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{cases} 10 \cdot a_0 + 9546 \cdot a_1 + 45 \cdot a_2 = 1927 \\ 9546 \cdot a_0 + 9145890 \cdot a_1 + 42859,9 \cdot a_2 = 1843355 \\ 45 \cdot a_0 + 42859,9 \cdot a_1 + 200,96 \cdot a_2 = 8675,8 \end{cases}$$

Таблиця 2.4 – Показники для розрахунку коефіцієнтів моделі

№ року	Позначення показника									
	P	T	Q	P ²	P · T	Q · P	Q · T	T ²	Q ^M	Q _i – Q _i ^M
1	999	4,2	162	998001	4195,8	161838	680,4	17,64	213	51
2	998	4,2	208	996004	4191,6	207584	873,6	17,64	213	5
3	995	4,3	186	990025	4278,5	185070	799,8	18,49	209	23
4	989	4,4	190	978121	4351,6	187910	836	19,36	206	16
5	979	4,5	190	958441	4405,6	186010	855	20,25	200	10
6	963	4,5	210	927369	4333,5	202230	945	20,25	195	15
7	940	4,6	206	883600	4324	193640	947,6	21,16	186	20
8	990	4,7	216	980100	4653	213840	1015,2	20,09	199	17
9	870	4,8	208	756900	4176	180960	998,4	23,04	160	48
10	823	4,8	151	677329	3950,4	124273	724,8	23,04	146	5
Σ	9546	45	1927	9145890	42859,9	1843355	8675,8	200,96	1927	210

Рішенням цієї системи будуть значення коефіцієнтів $a_0=151,4$; $a_1=0,0878$; $a_2=-9,45$, а рівняння тренду буде таким:

$$Q = 151,4 + 0,088 \cdot P - 9,45 \cdot T.$$

Знаходимо значення обсягу перевезень за моделлю:

$$Q_1 = 151,4 + 0,088 \cdot 999 - 9,45 \cdot 4,2 = 198,62;$$

$$Q_2 = 151,4 + 0,088 \cdot 998 - 9,45 \cdot 4,2 = 201,53;$$

$$Q_3 = 151,4 + 0,088 \cdot 995 - 9,45 \cdot 4,3 = 197,33;$$

$$Q_4 = 151,4 + 0,088 \cdot 989 - 9,45 \cdot 4,4 = 195,86;$$

$$Q_5 = 151,4 + 0,088 \cdot 979 - 9,45 \cdot 4,5 = 194,04;$$

$$Q_6 = 151,4 + 0,088 \cdot 963 - 9,45 \cdot 4,5 = 192,65;$$

$$Q_7 = 151,4 + 0,088 \cdot 940 - 9,45 \cdot 4,6 = 189,7;$$

$$Q_8 = 151,4 + 0,088 \cdot 900 - 9,45 \cdot 4,7 = 193,11;$$

$$Q_9 = 151,4 + 0,088 \cdot 870 - 9,45 \cdot 4,8 = 181,73;$$

$$Q_{10} = 151,4 + 0,088 \cdot 823 - 9,45 \cdot 4,8 = 177,64.$$

2. Розраховуємо парні коефіцієнти кореляції між Q і P ($r_{Q/P}$), Q і T ($r_{Q/T}$), P і T ($r_{P/T}$) за формулами (2.3) – (2.5):

$$\bar{Q} = \left(\sum_{i=1}^{10} Q_i \right) / 10 = 192,7; \quad \bar{P} = \left(\sum_{i=1}^{10} P_i \right) / 10 = 954,6;$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (Q_i - \bar{Q})^2}{10}} = \sqrt{\frac{(162 - 192,7)^2 + (208 - 192,7)^2 + (186 - 192,7)^2 + (190 - 192,7)^2 + (190 - 192,7)^2 + (210 - 192,7)^2 + (206 - 192,7)^2 + (216 - 192,7)^2 + (208 - 192,7)^2 + (151 - 192,7)^2}{10}} = \sqrt{368,52} = 19,18;$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (P_i - \bar{P})^2}{10}} = \sqrt{\frac{(999 - 954,6)^2 + (998 - 954,6)^2 + (995 - 954,6)^2 + (989 - 954,6)^2 + (979 - 954,6)^2 + (963 - 954,6)^2 + (940 - 954,6)^2 + (990 - 954,6)^2 + (870 - 954,6)^2 + (823 - 954,6)^2}{10}} = \sqrt{3327,8} = 57,68;$$

$$\overline{Q \cdot P} = \left(\sum_{i=1}^n Q_i \cdot P_i \right) / 10 = 184335,5;$$

$$r_{Q/P} = \frac{\overline{Q \cdot P} - \bar{Q} \cdot \bar{P}}{\sigma_Q \cdot \sigma_P} = \frac{184335,5 - (192,7 \cdot 954,6)}{19,18 \cdot 57,68} = 0,35.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт кореляції для параметрів Q і T та P і T, які дорівнюють $r_{Q/T} = 0,099$; $r_{P/T} = -0,8$. Зробимо аналіз кореляційного зв'язку параметрів, який представлено в табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Характеристика кореляційного зв'язку параметрів

Вид характеристики зв'язку	Назва параметрів		
	Q і P	Q і T	P і T
Напрямок зв'язку	прямий	прямий	зворотний
Сила зв'язку	середня	слабка	слабка

Визначимо множинний коефіцієнт кореляції за формулою (2.6):

$$R_{Q/PT} = \sqrt{\frac{r_{Q/P}^2 + r_{Q/T}^2 - 2 \cdot r_{Q/P} \cdot r_{Q/T} \cdot r_{P/T}}{1 - r_{P/T}^2}} = 0,62.$$

3. Визначимо середню помилку апроксимації для обох моделей за формулою (2.7):

$$\varepsilon^{np} = \frac{\sum_{i=1}^{10} |Q_i - Q_i^n|}{10} = 21.$$

4. Знайдемо за допомогою отриманої моделі прогнозне значення обсягу перевезень підприємства, якщо відомо, що обсяг виробництва в прогнозованому періоді збільшився на 5%, а тариф у прогнозованому періоді залишається на рівні останнього звітнього року:

$$P_{11} = 1,05 \cdot P_{10} = 1,05 \cdot 823 = 864,15; \quad T_{11} = T_{10} = 4,8.$$

$$Q_{11} = 151,4 + 0,088 \cdot P_{11} - 9,45 \cdot T_{11};$$

$$Q_{11} = 151,4 + 0,088 \cdot 864,15 - 9,45 \cdot 4,8 = 181,2 \text{ тис.т.}$$

5. Висновки за результатами роботи.

Запитання для самоперевірки

1. До яких регресійних моделей відносять модель „побут-пропозиція”?
2. Дати характеристику випадкам, до яких може бути зведена модель „побут-пропозиція”?
3. Дати назву й пояснити застосування математичного методу, який дозволяє отримати рішення моделі?
4. Пояснити у загальному вигляді послідовність отримання тренду моделі „побут-пропозиція”.
5. Дати оцінку кореляційним зв'язкам між параметрами моделі P і T , T і Q , Q і P ?
6. Які можливості має кореляційний аналіз для оцінки зв'язку між досліджуваними параметрами?

Заняття 3

РОЗРАХУНОК ОБСЯГУ ВИПУСКУ ЗА СТАТИЧНОЮ ЛІНІЙНОЮ МОДЕЛЮ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Мета заняття - перевірити ступінь освоєння питань, що викладаються в лекційному курсі за цією темою.

Завдання. Розрахувати обсяг випуску сектора „ТРАНСПОРТ” у прогнозованому періоді за статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу. Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведені у табл. 3.1 - 3.2.

За перший сектор у моделі приймається сектор „Транспорт”, за другий „Виробництво”, за третій – „Паливно-енергетичний комплекс”. Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведені у табл. 3.1, 3.2 та 3.3.

Кожний студент отримує тризначний номер варіанта і обирає вихідні дані згідно з правилом: перша цифра варіанта вказує на номер варіанта з табл. 3.1, друга – на номер варіанта з табл. 3.2 і третя – з табл. 3.3.

Таблиця 3.1 – Потоки сектора „Транспорт”, млн. грн.

Назва потоку	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Власне споживання сектора „Транспорт” (X_{11})	89	83	178	267	56	145	59	123	72	181
Поставки сектора „Транспорт” у сектор “Виробництво” (X_{12})	3560	2759	4628	5607	4806	5785	4094	5016	3240	4410
Поставки сектора „Транспорт” у сектор кінцевого споживання (Y_1)	2670	3649	3738	4717	3916	4895	4183	5121	3330	4320

Таблиця 3.2 – Потоки сектора „Виробництво”, млн. грн.

Назва потоку	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Поставки сектора “Виробництво” у сектор „Транспорт” (X_{21})	680	285	570	312	331	708	349	726	288	576
Власне споживання сектора “Виробництво” (X_{22})	27603	23772	44784	84048	24262	46164	64416	86348	66813	64836
Поставки сектора “Виробництво” у сектор кінцевого споживання (Y_2)	46005	46925	38646	49685	51526	52444	53366	85428	34743	63906

Таблиця 3.3 – Значення коефіцієнтів для розрахунку потоків секторів

Коефіцієнт	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κ_1	2/3	1/3	1	1/4	2/3	3/4	1	3/4	1/3	2/3
κ_2	2/3	1/4	1/3	1	1	3/4	1/3	1	1/4	2/3
κ_3	1/2	1	1/3	3/4	1/4	1/2	3/4	1/3	1/5	1/2
κ_4	3	4	5	2	1	3	2	4	5	3
κ_5	3/4	1/5	1/4	2/3	1/3	1	1/4	1/5	3/4	1/2
h_1	1,03	1,07	0,95	1,16	1,10	1,15	0,89	0,96	1,03	0,85
h_2	0,85	0,95	1,05	1,06	1,10	1,19	0,91	0,86	1,04	1,00
h_3	1,00	1,02	1,05	1,03	1,00	1,00	1,01	1,08	1,00	1,00
g_2	1,02	1,05	1,03	1,08	1,00	1,02	1,00	1,09	1,12	1,10
g_3	1,06	1,00	1,08	1,07	1,00	0,89	0,93	1,00	0,82	1,00

Вказівки до виконання завдання

1. Скласти статистичну лінійну балансову модель міжгалузевих зв'язків (СЛБМ).

СЛБМ призначена для визначення змін валового випуску розглядуваного сектора та міжсекторних потоків при різноманітних варіантах зміни потоків сектора кінцевого споживання та валового випуску інших секторів, що входять до складу моделі.

Структурними елементами моделі є сектори.

Сектор – це різні виробничі комплекси міста (регіону, держави). Кожний виробничий комплекс є виробляючим та споживаючим сектором. Наприклад, сектор „Транспорт” (Т) – це сукупність усіх систем різних видів транспорту, які функціонують у місті; сектор „Паливно-енергетичний комплекс” (ПЕК) – сукупність виробництв, що забезпечують вимоги міста в енергоносіях (вугілля, нафта, газ, електроенергія); „сектор „Виробництво” (В) – галузі економіки, що не включені в інші сектори.

Крім виробничих секторів модель включає ще сектор кінцевого споживання. Кінцеве споживання – це споживання, направлене не на виробництво товарів та послуг, а на задоволення вимог людей, які мешкають на території міста.

1.1 Визначити потоки сектора ПЕК, використовуючи значення поставок сектора „Транспорт”. Точність розрахунків у 1-му пункті – один знак після коми:

$$x_{13} = x_{12} \cdot k_1; \quad x_{23} = x_{12} \cdot k_2; \quad x_{33} = x_{22} \cdot k_3; \quad x_{31} = x_{21} \cdot k_4; \quad x_{32} = x_{22} \cdot k_5. \quad (3.1)$$

Поставки сектора „Паливно-енергетичний комплекс” у сектор кінцевого споживання (Y_3) зв’язані залежністю

$$Y_3 = \frac{1}{3} \cdot Y_2. \quad (3.2)$$

1.2 Розрахувати валовий випуск кожного сектора X_i за наступний період:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, \quad (3.3)$$

де n - кількість секторів у розглянутій моделі; x_{ij} – поставки i -го сектора в j -й сектор, млн. грн.; Y_i – поставки i -го сектора в сектор кінцевого споживання, млн. грн.

1.3 Подати отримані дані у матричному вигляді, тобто записати СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & Y_1 & X_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & Y_2 & X_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & Y_3 & X_3 \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

2. На основі визначеної в попередньому пункті моделі міжгалузевих зв’язків (3.4) розрахувати матрицю коефіцієнтів прямих витрат A . Елементи матриці a_{ij} визначають за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (3.5)$$

де X_j – валовий випуск j -го сектора, млн. грн.

Точність розрахунків тут і далі – три знаки після коми. Матриця коефіцієнтів прямих витрат записується у вигляді

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

3. Розрахувати матрицю коефіцієнтів повних витрат B . Для розрахунку матриці використовуємо матричну формулу:

$$B = |E - A|^{-1}, \quad (3.7)$$

де E – одинична матриця.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вводимо позначення

$$D = |E - A|, \quad (3.8)$$

тоді в лінійному вигляді матрицю D розраховуємо за виразом

$$D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & 1 - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & 1 - a_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

Для одержання матриці B необхідно згорнути матрицю D за залежністю

$$B = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{vmatrix}^T, \quad (3.10)$$

де $\det D$ – визначник матриці D ; d'_{ij} – алгебраїчне доповнення ij -го елемента матриці D ; T - означає транспоновану матрицю.

Визначник (детермінант) – це число D , утворене з n^2 чисел d_{ij} елементів, які розташовані в квадратну таблицю з n рядків і n стовбців.

Визначник можна розрахувати за правилом «Саррюса» (див. рис. 2). Для визначників другого і третього порядків формули розрахунків такі:

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \quad (3.11)$$

$$\det D = d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{31} - d_{13}d_{22}d_{31} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33}. \quad (3.12)$$

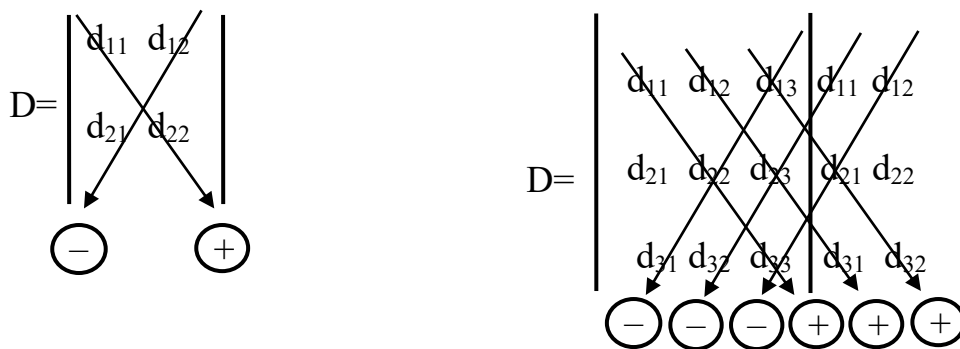


Рис. 2 – Розрахунок визначника за правилом Саррюса

Точність розрахунку визначника - вісім знаків після коми.

Розрахувати значення алгебраїчних доповнень.

Алгебраїчне доповнення ij -го елемента матриці – це мінор (M_{ij}) елемента, помножений на (-1) у степені $(i+j)$.

$$d'_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{(i+j)}. \quad (3.13)$$

Міnor – це визначник під матрицею, який отримають викреслюванням i -го рядка і j -го стовпчика вихідної матриці.

Транспонування матриці – це таке перетворення вихідної матриці, в результаті якого рядки вихідної матриці стануть стовцями результуючої матриці.

4. Перевірити правильність обертання матриці B .

Після отримання матриці B за (3.9) перевіряємо правильність її обертання, для чого розраховуємо матрицю K :

$$K = B \cdot D. \quad (3.14)$$

Для отримання ij -го елемента матриці K при множенні матриць B і D необхідно елементи i -го рядка матриці B помножити на відповідні елементи j -го стовпчика матриці D , а потім скласти розраховані добушки. Сума цих перетворень і дасть шуканий елемент результуючої матриці.

Матриця K записуємо у вигляді:

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Потім перевіряємо рівність матриць K і E . Елементи матриць вважаються рівними, якщо різниця між ними існує тільки у третьому знаку після коми:

$$k_{ij} = e_{ij}, \text{ при } |k_{ij} - e_{ij}| < 0,01. \quad (3.16)$$

Матриці рівні між собою, якщо рівні всі їхні елементи, тобто для кожної пари елементів виконується умова (3.16). Якщо $K \neq E$, перевіряється правильність розрахунку матриці B .

5. Визначити необхідні зміни валового випуску і міжсекторних потоків при зміні векторів кінцевого споживання. Наприклад, поставки сектора «Транспорт» у сектор кінцевого споживання у плановий період збільшуються на 10%, при цьому в інших секторах змін не відбувається. Визначаємо необхідну величину поставок сектора «Транспорт» у сектор кінцевого споживання:

$$Y'_1 = 1,1 \cdot Y_1, \quad Y'_2 = Y_2, \quad Y'_3 = Y_3. \quad (3.17)$$

тут і далі апостроф позначає належність елемента до планового періоду.

Розраховуємо нове значення валового випуску трьох виробничих секторів за формулою

$$X'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y'_j. \quad (3.18)$$

За матрицею коефіцієнтів прямих витрат A знаходимо нові значення міжсекторних потоків:

$$x'_{ij} = a_{ij} \cdot Y'_j. \quad (3.19)$$

Отримані результати рекомендується навести у вигляді матриці СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} & Y'_1 & X'_1 \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} & Y'_2 & X'_2 \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} & Y'_3 & X'_3 \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

Валовий випуск секторів і міжсекторних потоків порівнюємо з базовим варіантом матриці, яка розрахована за (3.4) для формулювання висновків. Висновки треба подати у вигляді тексту та порівняльної діаграми.

6. Визначення необхідних змін валового випуску сектора «Транспорт» при

зміні векторів кінцевого споживання і валового випуску інших секторів.

Визначають величини поставок усіх секторів у сектор кінцевого споживання, а також валовий випуск секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс» за формулами

$$Y'_1 = h_1 Y_1, \quad Y'_2 = h_2 Y_2, \quad Y'_3 = h_3 Y_3; \quad X'_2 = g_2 X_2, \quad X'_3 = g_3 X_3, \quad (3.21)$$

де h_1, h_2, h_3 – коефіцієнти відповідних секторів, що вказують на зміну векторів сектору кінцевого споживання; g_2, g_3 – коефіцієнти, що вказують на зміну валового випуску секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс».

На підставі залежностей (3.18) і (3.22) визначають всі можливі моделі для розрахунку валового випуску сектора «Транспорт», за якими розраховують різноманітні його значення:

$$X'_i = \sum_j^n a_{ij} X'_j + Y'_i. \quad (3.22)$$

Для одержання моделей за залежністю (3.22) послідовно змінюється значення індексу i в межах від 1 до 3 і в кожному з варіантів моделі значення валового випуску сектора «Транспорт» виражається через інші змінні.

7. Зробити висновки за результатами роботи. Висновки формулюють на підставі результатів виконання пунктів 5 і 6. У пункті 5 виділяють міжсекторні потоки, які найбільшою мірою змінюються при 10-ти процентному збільшенні обсягу поставок сектора «Транспорт» у сектор кінцевого споживання. Пункт 6 повинен містити зміст про можливість використання моделей для прогнозування обсягу роботи сектора «Транспорт».

Приклад.

Завдання. Розрахувати обсяг випуску сектора „ТРАНСПОРТ” у прогнозованому періоді за статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу. Вихідні дані для розрахунків за поточний період наведені в табл. 3.4, 3.5.

Таблиця 3.3 – Значення потоків секторів, млн. грн.

Варіант № 400					
Назва потоків сектора „Транспорт”			Назва потоків сектора „Виробництво”		
Власне споживан- ня (x_{11})	Поставки у сектор „Виробницт- во” (x_{12})	Поставки у сектор кінцево- го споживання (Y_1)	Поставки у сектор „Транспорт” (x_{21})	Власне споживання (x_{22})	Поставки у сектор кінцево- го споживання (Y_2)
56	4806	3916	680	27603	46005

Таблиця 3.4 – Значення коефіцієнтів для розрахунку потоків секторів

Позначення коефіцієнта									
K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	h_1	h_2	h_3	g_2	g_3
2/3	2/3	1/2	2	3/4	1,03	0,85	1,00	1,02	1,06

Вирішення:

1. Складемо статистичну лінійну балансову модель міжгалузевих зв'язків.

1.1 Використовуючи формули (3.1) і (3.2), визначимо потоки сектора ПЕК.

$$x_{13} = x_{12} \cdot 2/3 = 4806 \cdot 2/3 = 3204 \text{ млн. грн.};$$

$$x_{23} = x_{12} \cdot 2/3 = 27603 \cdot 2/3 = 18402 \text{ млн. грн.};$$

$$x_{33} = x_{22} \cdot 1/2 = 27603 \cdot 1/2 = 13802 \text{ млн. грн.};$$

$$x_{31} = x_{21} \cdot 2 = 680 \cdot 2 = 1360 \text{ млн. грн.};$$

$$x_{32} = x_{22} \cdot 3/4 = 27603 \cdot 3/4 = 20702 \text{ млн. грн.};$$

$$Y_3 = 1/3 \cdot Y_2 = 1/3 \cdot 46005 = 15335 \text{ млн. грн.}$$

1.2 Розрахуємо валовий випуск кожного сектора X_i за наступний період за формулою (3.3):

$$X_1 = \sum_{j=1}^n x_{1j} + Y_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + Y_1 = 56 + 4806 + 3204 + 3916 = 11982 \text{ млн. грн.}$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + Y_2 = 680 + 27603 + 18402 + 46005 = 92690 \text{ млн. грн.}$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + Y_3 = 1360 + 20702 + 15802 + 15335 = 51199 \text{ млн. грн.}$$

Отримані дані записуємо в матричному вигляді, тобто складаємо СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} 56 & 4806 & 3204 & 3916 & 11982 \\ 680 & 27603 & 18402 & 46005 & 92690 \\ 1360 & 20702 & 13802 & 15335 & 51199 \end{vmatrix}.$$

2. Визначимо валовий випуск секторів із застосуванням СЛБМ.

2.1 На основі визначеної в попередньому пункті моделі міжгалузевих зв'язків і використовуючи формулу (3.5), розрахуємо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{56}{11982} = 0,005; & a_{12} &= \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{4806}{92690} = 0,052; & a_{13} &= \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{3204}{51199} = 0,063; \\ a_{21} &= \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{680}{11982} = 0,057; & a_{22} &= \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{27603}{92690} = 0,298; & a_{23} &= \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{18402}{51199} = 0,359; \\ a_{31} &= \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{1360}{11982} = 0,114; & a_{32} &= \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{20702}{92690} = 0,223; & a_{33} &= \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{13802}{51199} = 0,270; \end{aligned}$$

Матриця коефіцієнтів прямих витрат має вигляд

$$A = \begin{vmatrix} 0,005 & 0,052 & 0,063 \\ 0,057 & 0,298 & 0,359 \\ 0,114 & 0,223 & 0,270 \end{vmatrix}.$$

2.2 Визначимо матрицю коефіцієнтів повних витрат B . Використовуючи формули (3.8), (3.9), розрахуємо матрицю D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 - 0,005 & 0 - 0,052 & 0 - 0,063 \\ 0 - 0,057 & 1 - 0,298 & 0 - 0,359 \\ 0 - 0,114 & 0 - 0,223 & 1 - 0,270 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,995 & -0,052 & -0,063 \\ -0,057 & 0,702 & -0,359 \\ -0,114 & -0,223 & 0,730 \end{vmatrix}.$$

Після розрахунку матриці D проведемо її обертання за формулою (3.10), при цьому необхідно використати формули (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned} \det D &= d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{13}d_{22}d_{31} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33} = \\ &= [0,995 \cdot 0,702 \cdot 0,73] + [(-0,052) \cdot (-0,359) \cdot (-0,114)] + \\ &+ [(-0,063) \cdot (-0,057) \cdot (-0,223)] - [(-0,063) \cdot 0,702 \cdot (-0,114)] - \\ &- [0,995 \cdot (-0,359) \cdot (-0,223)] - [(-0,052) \cdot (-0,057) \cdot 0,73] = 0,421. \end{aligned}$$

Визначимо алгебраїчне доповнення елементів матриці D . Наприклад, для визначення елемента d'_{11} викреслюємо перший рядок і перший стовпчик з

матриці D , а елементи, що залишилися, утворюють шукану субматрицю, яку помножуємо на $(-I)$ у степені $(I+I)$:

$$d'_{11} = M_{11} \cdot (-1)^{(I+1)} = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+1)} = [(d_{22} \cdot d_{33} - d_{23} \cdot d_{32})] \cdot (-1)^2 = [(0,702 \cdot 0,73) - (-0,359) \cdot (-0,223)] \cdot (-1)^2 = 0,432.$$

Матриця B має наступний вигляд:

$$B = \frac{1}{\det D} \cdot \begin{vmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} \end{vmatrix}^T = \frac{1}{0,420} \cdot \begin{vmatrix} 0,432 & 0,083 & 0,093 \\ 0,052 & 0,719 & 0,228 \\ 0,063 & 0,360 & 0,696 \end{vmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{0,420} \cdot \begin{vmatrix} 0,432 & 0,052 & 0,063 \\ 0,083 & 0,719 & 0,360 \\ 0,093 & 0,228 & 0,696 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,028 & 0,124 & 0,150 \\ 0,198 & 1,711 & 0,857 \\ 0,221 & 0,542 & 1,656 \end{vmatrix}$$

2.3 Перевіримо правильність обертання матриці B . Для цього розрахуємо матрицю K . Наприклад, для перших елементів матриці K маємо:

$$k_{11} = 1,028 \cdot 0,995 + 0,124 \cdot (-0,057) + 0,15 \cdot (-0,114) = 1,023 - 0,024 = 0,999;$$

$$k_{12} = 1,028 \cdot (-0,005) + 0,124 \cdot 0,702 + 0,15 \cdot (-0,223) = -0,053 + 0,087 - 0,033 = 0,001.$$

$$K = \begin{vmatrix} 0,999 & 0,0001 & 0,000 \\ 0,001 & 1,0000 & 0,0003 \\ 0,0001 & 0,0004 & 1,000 \end{vmatrix}.$$

Різниця між елементами матриць K і E задовольняє вимозі (3.16), тому матриця B розрахована правильно.

3. Визначимо зміни валового випуску і міжсекторних потоків при зміні векторів кінцевого споживання.

У перспективному періоді збільшуються на 10% поставки сектора «Транспорт» у сектор кінцевого споживання, при цьому в інших секторах змін не відбуваються:

$$Y'_1 = 1,1 \cdot Y_1 = 1,1 \cdot 3916 = 4307,6 \text{ млн. грн}, Y'_2 = Y_2 = 46005 \text{ млн. грн},$$

$$Y'_3 = Y_3 = 15335 \text{ млн. грн}.$$

Розрахуємо нове значення валового випуску трьох виробничих секторів використовуючи формулу (3.18):

$$X'_1 = b_{11} \cdot Y'_1 + b_{12} \cdot Y'_2 + b_{13} \cdot Y'_3 = 1,028 \cdot 4307,6 + 0,124 \cdot 46005 + 0,15 \cdot 15335 = 12433 \text{ млн.грн};$$

$$X'_2 = b_{21} \cdot Y'_1 + b_{22} \cdot Y'_2 + b_{23} \cdot Y'_3 = 0,198 \cdot 4307,6 + 1,711 \cdot 46005 + 0,857 \cdot 15335 = 92709,5 \text{ млн.грн};$$

$$X'_3 = b_{31} \cdot Y'_1 + b_{32} \cdot Y'_2 + b_{33} \cdot Y'_3 = 0,221 \cdot 4307,6 + 0,542 \cdot 46005 + 1,656 \cdot 15335 = 51281 \text{ млн.грн}.$$

З використанням матриці коефіцієнтів прямих витрат A знайдемо нові значення міжсекторних потоків, наприклад:

$$x'_{11} = a_{11} \cdot Y'_1 = 0,005 \cdot 12433 = 62,165 \text{ млн.грн};$$

$$x'_{12} = a_{11} \cdot Y'_2 = 0,052 \cdot 92709,5 = 4820,9 \text{ млн.грн}.$$

Отримані результати наведені у вигляді матриці СЛБМ:

$$\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} & Y'_1 & X'_1 \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} & Y'_2 & X'_2 \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} & Y'_3 & X'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62,165 & 4820,9 & 3230,7 & 4307,6 & 12433 \\ 708,681 & 27627,43 & 18410 & 46005 & 92709,5 \\ 1417,362 & 20674,218 & 13845,87 & 15335 & 51281 \end{vmatrix}.$$

Валовий випуск секторів і міжсекторних потоків порівнюють з базовим варіантом матриці, що розрахована за (3.4). Наприклад, $x_{11}=56$ млн. грн., $x'_{11}=62,165$ млн. грн., тобто власне споживання сектора „Т” збільшилось на 11%; $x_{33}=15335$ млн. грн., $x'_{33}=13845,87$ млн. грн., тобто власне споживання сектора „ТЕК” зменшилось на 9,71%. Висновки у вигляді тексту та порівняльної діаграми навести в пункті 5.

4. Визначимо зміни валового випуску сектора «Транспорт» при зміні векторів кінцевого споживання і валового випуску секторів «Виробництво» і «Паливно-енергетичний комплекс»:

$$Y'_1 = h_1 \cdot Y_1 = 1,03 \cdot 3916 = 4033,5 \text{ млн.грн}; Y'_2 = h_2 \cdot Y_2 = 0,85 \cdot 46005 =$$

$$39104,3 \text{ млн.грн}; Y'_3 = h_3 \cdot Y_3 = 1,0 \cdot 15335 = 15335 \text{ млн.грн}; X'_2 = g_2 \cdot X_2 =$$

$$1,02 \cdot 92690 = 94543,8 \text{ млн.грн}; X'_3 = g_3 \cdot X_3 = 1,06 \cdot 51199 = 54271 \text{ млн.грн}.$$

Використовуючи залежність (3.18) визначимо валовий випуск сектора „Т” на перспективний період при зміні поставок у сектор кінцевого споживання:

$$X'_1 = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot Y'_j = b_{11} \cdot Y'_1 + b_{12} \cdot Y'_2 + b_{13} \cdot Y'_3 = 1,028 \cdot 4033,5 + 0,124 \cdot 39104,3 + 0,15 \cdot 15335 = 11295,6 \text{ млн. грн}.$$

На підставі виразу (3.22) визначимо всі можливі моделі для розрахунку валового випуску сектора «Транспорт». Для одержання моделей за залежністю (3.22) послідовно змінюємо значення індексу i у межах від 1 до 3:

$$X_1' = \sum_j^n a_{ij} X_j' + Y_i' = a_{11} \cdot X_1' + a_{12} \cdot X_2' + a_{13} \cdot X_3' + Y_1' = 0,005 \cdot 11295,6 + \\ + 0,052 \cdot 94543,8 + 0,063 \cdot 54271 + 4033,5 = 12425,3 \text{ млн. грн};$$

$$X_1' = \sum_j^n a_{ij} X_j' + Y_i' = a_{21} \cdot X_1' + a_{22} \cdot X_2' + a_{23} \cdot X_3' + Y_1' = 0,057 \cdot 11295,6 + \\ + 0,298 \cdot 94543,8 + 0,359 \cdot 54271 + 39104,3 = 87405 \text{ млн. грн};$$

$$X_1' = \sum_j^n a_{ij} X_j' + Y_i' = a_{31} \cdot X_1' + a_{32} \cdot X_2' + a_{33} \cdot X_3' + Y_1' = 0,114 \cdot 11295,6 + \\ + 0,223 \cdot 94543,8 + 0,27 \cdot 54271 + 15335 = 52359 \text{ млн. грн}.$$

Для кожного з варіантів моделі значення валового випуску сектора «Транспорт» зробити висновки щодо можливості використання моделей для прогнозування обсягу роботи сектора та навести їх у пункті 5.

5. Висновки за результатами роботи.

Запитання для самоперевірки

1. Для чого призначена СЛБМ?
2. Дати визначення сектора СЛБМ. Які сектори застосовані в моделі?
3. Обґрунтувати, чому модель міжгалузевих зв'язків називають статистичною?
4. Навести загальну структуру СЛБМ у графічному, табличному й матричному виглядах.
5. Як визначити за моделлю міжгалузевих зв'язків зміни сектора «Т» при зміні поставок у сектор кінцевого споживання та потоків інших секторів.
6. В якій послідовності виконують у моделі прогнозування розвитку транспортної системи?
7. Який сенс має матриця коефіцієнтів прямих витрат при розрахунку потоків?
8. Яким принципом треба керуватися при впорядкуванні матриці міжсекторних потоків.
9. Як виконують обертання матриць та перевірку обертання матриць?
10. Як виконують трансформування матриць? Навести приклади.
11. Що таке мінор матриці? Як його визначити?
12. Що таке алгебраїчне доповнення елемента матриці? Навести приклади.
13. Що таке визначник? Яким чином розраховують визначник другого, третього, четвертого порядків? Навести приклад у загальному вигляді.
14. Виконання, якої умови свідчить про рівність матриць?
15. Як виконують помноження матриць. Навести приклад помноження матриць третього порядку у загальному вигляді?

Заняття 4

РОЗРАХУНОК МАТРИЦІ ПАСАЖИРСЬКИХ КОРЕСПОНДЕНЦІЙ ГРАВІТАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Мета заняття – вивчити методику розрахунку матриці пасажирських кореспонденцій гравітаційним методом.

Завдання. Визначити матрицю пасажирських кореспонденцій гравітаційним методом.

З табл. 4.1 номери транспортних районів обирають за першою цифрою варіанта, а з табл. 4.2 – за другою цифрою. Характеристики транспортних районів наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.1 – Номери транспортних районів

Транспортний район	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	36	1	2	5	7	3	6	4	8	10
2	41	9	12	17	15	14	18	25	11	13
3	45	16	24	22	19	21	26	30	20	23
4	48	35	28	29	37	31	33	39	26	32
5	50	40	43	38	46	42	49	47	34	44

Таблиця 4.2 – Номери транспортних районів

Транспортний район	Номер варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	86	51	52	55	57	53	56	54	58	60
7	91	59	62	67	65	64	68	77	61	63
8	95	66	74	72	69	71	76	80	50	53
9	98	85	78	79	87	81	83	89	76	82
10	100	90	93	88	96	92	99	97	84	94

Таблиця 4.3 – Характеристика транспортних районів

Номер району	Кількість, тис. чол.		Координата		Номер району	Кількість , тис. чол.		Координата	
	меш-канців	роб. місць	X	Y		меш-канців	роб. місць	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	1	40	54	51	45	8	61	74
2	65	20	32	74	52	61	28	19	50
3	85	6	94	14	53	29	1	30	7
4	31	1	58	16	54	87	1	30	7
5	73	16	65	60	55	36	1	75	78
6	31	8	61	32	56	72	5	90	99
7	65	30	49	34	57	92	29	36	86
8	55	26	29	25	58	50	18	83	25
9	57	12	4	98	59	78	20	60	88
10	22	3	4	28	60	24	8	72	75
11	28	13	4	81	61	43	19	41	60
12	1	1	69	45	62	32	7	19	37
13	58	25	41	63	63	44	11	59	59
14	81	3	71	48	64	91	3	37	2
15	64	19	17	45	65	44	4	62	27
16	99	11	98	85	66	47	1	54	79
17	9	2	67	1	67	32	1	49	10
18	58	1	45	50	68	98	41	30	58
19	39	5	17	43	69	62	24	90	52
20	82	11	62	57	70	30	8	15	58
21	18	6	56	24	71	66	13	68	86
22	32	8	91	7	72	20	1	51	23
23	34	5	53	35	73	63	2	31	31
24	84	41	57	31	74	82	34	28	94
25	78	20	50	16	75	47	20	46	27
26	15	1	21	40	76	12	5	15	73
27	38	14	77	87	77	67	13	39	95
28	51	25	68	36	78	83	3	1	32

Продовження табл. 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29	36	5	18	13	79	9	1	20	39
30	12	2	65	45	80	9	1	42	47
31	85	21	73	32	81	3	1	6	81
32	62	19	68	61	82	39	3	97	67
33	19	6	95	59	83	46	13	21	1
34	46	11	89	55	84	53	11	3	73
35	82	37	80	23	85	63	4	43	52
36	66	7	94	80	86	28	2	9	21
37	22	1	90	65	87	15	7	62	75
38	16	1	32	63	88	86	21	60	68
39	14	3	59	53	89	74	36	6	20
40	99	33	31	46	90	1	1	76	71
41	10	3	25	2	91	97	34	37	72
42	61	3	20	26	92	9	4	97	47
43	89	26	20	66	93	39	14	62	48
44	3	1	19	92	94	6	2	39	92
45	65	28	14	69	95	33	12	14	7
46	70	34	15	29	96	42	5	86	1
47	47	8	80	98	97	44	18	23	11
48	25	2	21	41	98	94	6	26	28
49	38	15	65	75	99	55	1	42	30
50	14	6	19	89	100	67	11	37	3

Вказівки до виконання завдання

1. Відповідно до заданого варіанта оформити вихідні дані. Наприклад, до варіанта 00 вихідні дані наведені у табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Приклад оформлення вихідних даних

Номер транспортного району	Номер транспортного району за варіантом	Мешкає, тис. чол.	Працює, тис. чол.	Координата	
				X	Y
1	36	66	7	94	80
2	41	10	3	25	2
3	45	65	28	14	69
4	48	25	2	21	41
4	48	25	2	21	41
5	50	14	6	19	89
6	86	28	2	9	21
7	91	97	34	37	72
8	95	33	12	14	7
9	98	94	6	26	28
10	100	67	11	37	3

2. Створити координатну модель транспортної мережі. Для цього у двомірній системі координат розмірністю від 0 до 100 в масштабі 1:100000, нарисувати центри транспортних районів і зв'язати їх між собою, щоб центр кожного транспортного району мав не менше трьох і не більше чотирьох зв'язків з іншими центрами.

3. За отриманою координатною моделлю транспортної мережі визначити довжину пересування між районами шляхом вимірювання. Серед існуючих в транспортній мережі зв'язків обрати найкоротші. Результати вимірювань l_{ij} занести до таблиці. Приклад представлення матриці найкоротших шляхів наведено у табл. 4.5.

4. Визначити час руху між транспортними районами і трудність сполучення. Час руху розраховують за формулою

$$t_{ij} = \frac{l_{ij}}{V} \cdot 60, \quad (4.1)$$

де l_{ij} – довжина кратчайшого шляху між i -м та j -м районами, км; V – швидкість руху транспортного засобу, км/год.

Швидкість руху транспортного засобу приймають 20 км/год. Час на пересування в середині району приймають 2 хв.

Трудність сполучення між транспортними районами (d_{ij}) визначають з використанням формули:

$$d_{ij} = \frac{1}{t_{ij}}. \quad (4.2)$$

Результати розрахунків навести в табличному вигляді.

Таблиця 4.5 – Матриця найкоротших шляхів

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	$l_{1\ 10}$
2	l_{21}	l_{22}	l_{23}	l_{24}	l_{25}	l_{26}	l_{27}	l_{28}	l_{29}	$l_{2\ 10}$
3	l_{31}	l_{32}	l_{33}	l_{34}	l_{35}	l_{36}	l_{37}	l_{38}	l_{39}	$l_{3\ 10}$
4	l_{41}	l_{42}	l_{43}	l_{44}	l_{45}	l_{46}	l_{47}	l_{48}	l_{49}	$l_{4\ 10}$
5	l_{51}	l_{52}	l_{53}	l_{54}	l_{55}	l_{56}	l_{57}	l_{58}	l_{59}	$l_{5\ 10}$
6	l_{61}	l_{62}	l_{63}	l_{64}	l_{65}	l_{66}	l_{67}	l_{68}	l_{69}	$l_{6\ 10}$
7	l_{71}	l_{72}	l_{73}	l_{74}	l_{75}	l_{76}	l_{77}	l_{78}	l_{79}	$l_{7\ 10}$
8	l_{81}	l_{82}	l_{83}	l_{84}	l_{85}	l_{86}	l_{87}	l_{88}	l_{89}	$l_{8\ 10}$
9	l_{91}	l_{92}	l_{93}	l_{94}	l_{95}	l_{96}	l_{97}	l_{98}	l_{99}	$l_{9\ 10}$
10	$l_{10\ 1}$	$l_{10\ 2}$	$l_{10\ 3}$	$l_{10\ 4}$	$l_{10\ 5}$	$l_{10\ 6}$	$l_{10\ 7}$	$l_{10\ 8}$	$l_{10\ 9}$	$l_{10\ 10}$

4. Визначити місткість транспортних районів.

Селітебну ємкість району (кількість мешканців району, або кількість відправлень) (H_i) розраховують з використанням виразу

$$H_i = N_p \cdot \frac{\sum_{j=1} H_j}{N_m}, \quad (4.3)$$

де N_p – кількість мешканців району, тис. чол.; H_j – трудова ємкість району, тис. чол.; N_m – населення міста, тис. чол.

$$N_m = \sum_{i=1}^{10} N_{p_i}. \quad (4.4)$$

Трудову ємкість району (кількість прибуття) (H_j) визначають виходячи з припущення, що в розглядуваний період часу (годину “пік”) в райони прибуває 80% всіх працюючих та культурно-побутові пересування у цей час відсутні.

$$H_j = 0,8 \cdot N, \quad (4.5)$$

де N – кількість робочих місць у районі, тис. чол.

Перевірити умову балансу місткості транспортних районів:

$$\sum_i H_i = \sum_j H_j. \quad (4.6)$$

Результати розрахунків подати в табличному вигляді.

5 Визначити матрицю кореспонденцій.

5.1 Матрицю кореспонденцій між транспортними районами розрахувати за допомогою гравітаційної моделі (за відправленням).

$$H_{ij} = H_i \cdot \frac{H_j d_{ij} k_j}{\sum_{j=1}^n H_j d_{ij} k_j}, \quad (4.7)$$

де k_j – коефіцієнт балансування.

Розрахунок матриці кореспонденцій – це ітераційний процес. На першій ітерації розрахунку матриці приймають $k_j=1$, а на інших ітераціях коефіцієнт визначають окремо за формулою (4.11). Для спрощення розрахунків введемо позначення

$$Y = H_j \cdot d_{ij} \cdot k_j, \quad (4.8)$$

тоді

$$H_{ij} = H_i \cdot \frac{Y_{ij}}{\sum_{j=1}^n Y_{ij}}.$$

Результати розрахунків подати у табличному вигляді.

5.2 Перевірити умову балансу матриці кореспонденцій.

Необхідно оцінити величину відхилення між вихідною величиною трудової ємкості районів (H_j) та трудової ємкості отриманою у результаті розподілу кореспонденцій за гравітаційною моделлю (H'_j). Величина відхилення не повинна перевищувати 10%. Відхилення для кожного району розраховують за формулою

$$\Delta_j = \frac{|H'_j - H_j|}{H_j} \cdot 100 = \frac{\left| \sum_j H_{ij} - H_j \right|}{H_j} \cdot 100, \quad (4.9)$$

$$\Delta_j \leq 10. \quad (4.10)$$

Якщо для одного з районів не виконується вимога (4.10), то розраховують за формулою (4.11) коефіцієнт балансування і розрахунок матриці кореспонденцій повторюють вже з новим значенням коефіцієнта на новій ітерації.

$$k_j = \frac{H_j}{H'_j} = \frac{H_j}{\sum_j H_{ij}}. \quad (4.11)$$

6. Зробити висновки за результатами роботи.

Висновки за результатами роботи формулюють з урахуванням загальної характеристики гравітаційного методу визначення матриці кореспонденцій та її відхилень, отриманих на різних ітераціях розрахунків.

Приклад.

Завдання. Розрахувати матрицю пасажирських кореспонденцій гравітаційним методом. Вихідні дані до розрахунку наведені у таблиці 4.6.

Вирішення:

1. Нарисуємо в масштабі $1:100000$ координатну модель транспортної мережі. (див. рис. 2).

2. Шляхом вимірювання за координатною моделлю транспортної мережі знайдемо найкоротшу довжину пересування між районами l_{ij} . Результати вимірювань представлено у табл. 4.6.

Таблиця 4.6 – Матриця найкоротших шляхів, км.

Номер району відправлення	Номер району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	10,7	8,0	8,2	7,4	10,4	6,5	12,2	8,5	9,5
2	10,7	0	7,5	4,7	9,4	2,7	4,5	1,2	2,5	1,2
3	8,0	7,5	0	2,7	2,0	4,8	4,4	6,2	6,4	8,7
4	8,2	4,7	2,7	0	4,7	2,5	1,7	3,5	3,7	6,4
5	7,4	9,4	2,0	4,7	0	6,8	5,0	8,2	7,0	9,8
6	10,4	2,7	4,8	2,5	6,8	0	3,8	1,5	1,8	3,9
7	6,5	4,5	4,4	1,7	5,0	3,8	0	5,7	2,0	4,8
8	12,2	1,2	6,2	3,5	8,2	1,5	5,7	0	3,3	2,4
9	8,5	2,5	6,4	3,7	7,0	1,8	2,0	3,3	0	2,8
10	9,5	1,2	8,7	6,4	9,8	3,9	4,8	2,4	2,8	0

3. Визначимо з використанням формул (4.1), (4.2) час руху між транспортними районами і трудність сполучення. При розрахунку швидкість руху транспортного засобу приймаємо 20 км/год.

Наприклад, час руху між першим та другим районами дорівнює:

$$t_{12} = \frac{l_{12}}{V} \cdot 60 = \frac{10,7}{20} \cdot 60 = 32,1 \text{ хв.}$$

Пересування у середині району ($t_{11}=t_{22}=\dots=t_{10,10}=2\text{хв.}$). Результати розрахунків наведено в табл. 4.7.

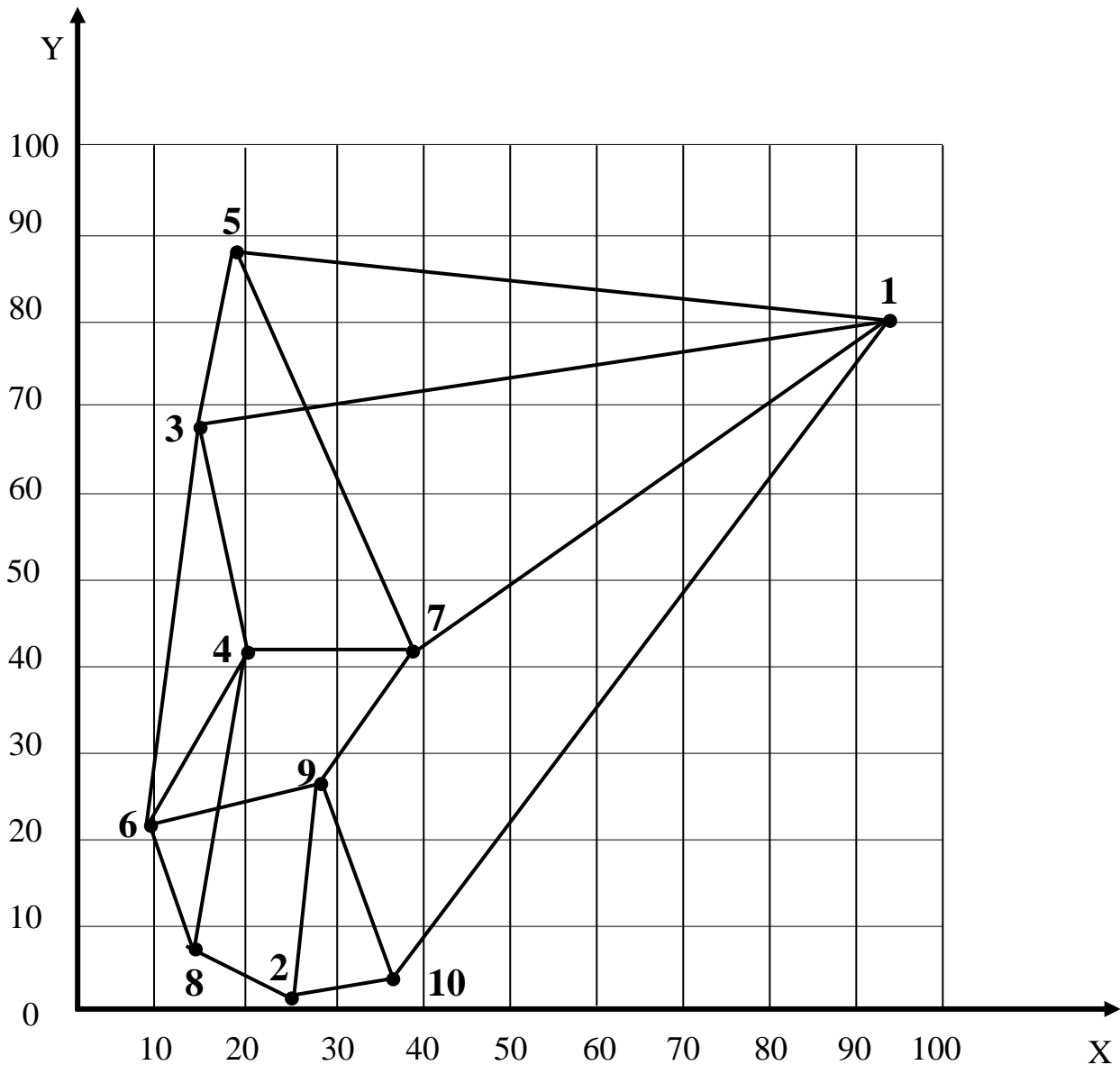


Рис. 2 – Графічне відображення транспортної мережі

Таблиця 4.7 – Час руху між транспортними районами, хв.

Номер району відправлення	Номер району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	32,1	24	24,6	22,2	31,2	19,5	36,6	25,5	28,5
2	32,1	2	22,5	14,1	28,2	8,1	13,5	3,6	7,5	3,6
3	24	22,5	2	8,1	6,0	14,4	13,2	18,6	19,2	26,1
4	24,6	14,1	8,1	2	14,1	7,5	5,1	10,5	11,1	19,2
5	22,2	28,2	6,0	14,1	2	18,0	15,0	24,6	21,0	29,4
6	31,2	8,1	14,4	7,5	18,0	2	11,4	4,5	5,4	11,7
7	19,5	13,5	13,2	5,1	15,0	11,4	2	17,	6,0	14,4
8	36,6	3,6	18,6	10,5	24,6	4,5	17,1	2	9,9	7,2
9	25,5	7,5	19,2	11,1	21,0	5,4	6,0	9,9	2	8,4
10	28,5	3,6	26,1	19,2	29,4	11,7	14,4	7,2	8,4	2

Наприклад, трудність сполучення для першого транспортного району дорівнює:

$$d_{11} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad d_{12} = \frac{1}{32,1} = 0,031; \quad d_{13} = \frac{1}{24} = 0,042.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Трудність сполучення між транспортними районами

Номер району відправлення	Номер району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,5	0,031	0,042	0,041	0,045	0,032	0,027	0,027	0,039	0,035
2	0,031	0,5	0,044	0,071	0,035	0,123	0,074	0,277	0,133	0,277
3	0,042	0,044	0,5	0,123	0,166	0,069	0,075	0,054	0,052	0,038
4	0,041	0,071	0,123	0,5	0,071	0,133	0,196	0,095	0,09	0,052
5	0,045	0,035	0,166	0,071	0,5	0,056	0,066	0,041	0,047	0,034
6	0,032	0,123	0,069	0,133	0,056	0,5	0,087	0,222	0,185	0,085
7	0,051	0,074	0,075	0,196	0,066	0,087	0,5	0,058	0,166	0,069
8	0,027	0,277	0,054	0,095	0,041	0,222	0,058	0,5	0,101	0,138
9	0,039	0,133	0,052	0,09	0,047	0,185	0,166	0,101	0,5	0,119
10	0,035	0,277	0,038	0,052	0,034	0,085	0,069	0,138	0,119	0,5

4. Визначимо місткість транспортних районів.

За формулою (4.5) визначимо трудову ємкість районів (кількість прибуття) (H_j):

$$H_1 = 0,8 \cdot N_1 = 0,8 \cdot 7 = 5,6 \text{ тис.чол.}; \quad H_2 = 0,8 \cdot N_2 = 0,8 \cdot 3 = 2,7 \text{ тис. чол.}$$

Результати розрахунків занесені до табл. 4.9.

$$N_{\text{м}} = \sum_{i=1}^{10} N_{p_i} = 66 + 10 + 62 + 25 + 14 + 28 + 97 + 33 + 94 + 67 = 499 \text{ тис. чол.}$$

З використанням формули (4.3) розрахуємо селитебна ємкість районів:

$$H_1 = N_1 \cdot \frac{\sum_{j=1} H_j}{N_M} = 66 \cdot \frac{127,2}{499} = 16,82 \text{ тис. чол.}; H_2 = 10 \cdot \frac{127,2}{499} = 2,54 \text{ тис. чол.}$$

Результати розрахунків занесені до табл. 4.9.

Перевіримо умову балансу ємкості транспортних районів: $\sum_i H_i = \sum_j H_j = 127,2$.

Таблиця 4.9 – Місткість транспортних районів.

Номер транспортного району	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Усього
Селітебна ємкість району (H_i), тис. чол.	16,82	2,54	16,57	6,37	3,57	7,13	24,72	8,41	23,96	17,08	127,2
Трудова ємкість району (H_j), тис. чол.	5,6	2,4	22,4	1,6	4,8	1,6	27,2	11,2	20,8	29,6	127,2

5 Розрахунок матриці кореспонденцій.

Визначення величини кореспонденцій між i -м та j -м транспортними районами виконуємо із застосуванням гравітаційної моделі (за відправленням).

Визначимо елементи матриці Y на першій ітерації. Значення коефіцієнта балансування на першій ітерації $k_j = 1$. Наприклад,

$$y_{11} = H_1 \cdot d_{11} \cdot k_1 = 5,6 \cdot 0,5 \cdot 1 = 2,8; \quad y_{12} = H_2 \cdot d_{12} \cdot k_2 = 22,4 \cdot 0,331 \cdot 1 = 0,074.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.10.

Таблиця 4.10 – Значення елементів матриці Y на першій ітерації

Номер району відправлення	Номер району прибуття										$\sum_j y_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2,8	0,074	0,94	0,065	0,22	0,051	1,387	0,302	0,811	1,036	7,686
2	0,174	1,2	0,98	0,113	0,168	0,196	2,01	3,102	2,766	8,199	19,91
3	0,235	0,105	11,2	0,196	0,796	0,11	2,04	0,604	1,081	1,124	17,49
4	0,225	0,17	2,76	0,8	0,34	0,21	5,33	1,06	1,87	1,54	14,31
5	0,25	0,08	3,72	0,11	2,4	0,09	1,8	0,45	0,98	1,0	10,88
6	0,18	0,3	1,54	0,21	0,27	0,8	2,36	2,49	3,84	2,51	14,5
7	0,28	0,18	1,68	0,31	0,32	0,14	13,6	0,65	3,47	2,04	22,67
8	0,15	0,66	1,21	0,15	0,19	0,35	1,57	5,6	2,1	4,1	16,08
9	0,22	0,32	1,16	0,09	0,23	0,3	4,52	1,13	10,4	3,52	21,89
10	0,19	0,66	0,85	0,08	0,16	0,13	1,87	1,54	2,48	14,8	22,76

Розрахуємо кореспонденції між районами. Наприклад,

$$H_{11} = H_1 \cdot \frac{y_{11}}{\sum_j y_{1j}} = 16,82 \cdot \frac{2,8}{7,686} = 6,13 \text{ тис. чол.}$$

$$H_{12} = H_1 \cdot \frac{y_{12}}{\sum_j y_{1j}} = 16,82 \cdot \frac{0,074}{7,686} = 0,16 \text{ тис. чол.}$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.11. Перевіримо умови балансу матриці кореспонденцій, використовуючи формулу (4.9). Наприклад,

$$\Delta_1 = \frac{|H'_1 - H_1|}{H_1} \cdot 100 = \frac{7,415 - 5,6}{5,6} \cdot 100 = 32,41; \Delta_2 = \frac{2,053 - 2,4}{2,4} \cdot 100 = 14,45.$$

Результати розрахунків занесено у відповідний рядок табл. 4.11.

Таблиця 4.11 – Матриця кореспонденцій на першій ітерації, тис. чол.

Номер району відправлення	Номер району прибуття										$\sum_i H_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	6,13	0,16	2,058	0,142	0,48	0,11	3,037	0,66	1,774	2,269	16,82
2	0,025	0,159	0,132	0,015	0,022	0,026	0,267	0,412	0,367	1,079	2,54
3	0,222	0,099	10,61	0,185	0,754	0,104	1,932	0,572	1,024	1,064	16,57
4	0,102	0,075	1,228	0,356	0,151	0,093	2,373	0,471	0,832	0,685	6,37
5	0,082	0,026	1,224	0,036	0,787	0,029	0,590	0,147	0,321	0,328	3,57
6	0,089	0,147	0,758	0,103	0,132	0,393	1,16	1,224	1,889	1,235	7,13
7	0,305	0,196	1,833	0,339	0,349	0,152	14,83	0,708	3,783	2,224	24,72
8	0,078	0,346	0,633	0,078	0,099	0,183	0,821	2,929	1,099	2,144	8,41
9	0,240	0,350	1,269	0,098	0,252	0,328	4,948	1,236	11,38	3,853	23,96
10	0,142	0,495	0,638	0,06	0,12	0,096	1,403	1,155	1,861	11,11	17,08
$H'_j = \sum_i H_{ij}$	7,415	2,053	20,38	1,412	3,146	1,514	31,36	9,514	24,33	25,99	–
$\Delta_j, \%$	32,41	14,45	9	11,75	34,4	5,37	15,3	15	16,9	12,1	–

Умова відповідності вихідної величини трудової ємкості районів і трудової ємкості, отримана у результаті розподілу кореспонденцій за гравітаційною моделлю, виконується тільки для третього і шостого транспортних районів. Тому розрахуємо нові значення коефіцієнта балансування і проведемо розрахунок матриці кореспонденцій на новій ітерації. Наприклад,

$$k_1 = \frac{H_1}{H'_1} = \frac{5,6}{7,415} = 0,76, \quad k_2 = \frac{H_2}{H'_2} = \frac{2,053}{2,4} = 1,17, \quad k_3 = \frac{H_3}{H'_3} = \frac{20,38}{22,4} = 1,10.$$

Значення коефіцієнта для транспортних районів на другій ітерації наведено в табл. 4.12.

Таблиця 4.12 – Значення коефіцієнта балансування на другій ітерації.

Номер транспортного району	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значення k_j	0,76	1,17	1,10	1,13	1,53	1,1	0,87	1,18	0,85	1,14

Визначимо елементи матриці Y на другій ітерації. Наприклад,

$$y_{11} = H_1 \cdot d_{11} \cdot k_1 = 5,6 \cdot 0,5 \cdot 0,76 = 2,128; y_{12} = H_2 \cdot d_{12} \cdot k_2 = 22,4 \cdot 0,331 \cdot 1,17 = 0,086.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.13.

Таблиця 4.13 – Значення елементів матриці Y на другій ітерації.

Номер району відправлення	Номер району прибуття										$\sum_j y_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2,128	0,086	1,03	0,073	0,336	0,056	1,206	0,356	0,689	1,181	7,141
2	0,132	1,4	1,078	0,127	0,257	0,215	1,748	3,66	2,351	9,346	20,34
3	0,178	0,123	12,32	0,18	1,218	0,121	1,774	0,713	0,918	1,281	18,82
4	0,174	0,199	3,036	0,9	0,52	0,231	4,637	1,18	1,589	1,755	14,22
5	0,19	0,094	4,092	0,124	3,67	0,099	1,566	0,531	0,833	1,14	12,34
6	0,137	0,351	1,694	0,237	0,413	0,88	2,053	2,94	3,264	2,861	14,83
7	0,213	0,21	1,84	0,35	0,49	0,154	11,83	0,76	2,95	2,325	21,12
8	0,114	0,772	1,33	0,169	0,29	0,385	1,305	6,608	1,78	4,674	17,43
9	0,167	0,374	1,276	0,101	0,352	0,33	3,93	1,333	8,84	4,01	20,71
10	0,144	0,772	0,935	0,09	0,245	0,143	1,626	1,817	2,108	16,87	24,75

Розрахуємо кореспонденції між районами. Наприклад,

$$H_{11} = H_1 \cdot \frac{y_{11}}{\sum_j y_{1j}} = 16,82 \cdot \frac{2,128}{7,141} = 5,012 \text{ тис. чол.}$$

$$H_{12} = H_1 \cdot \frac{y_{12}}{\sum_j y_{1j}} = 16,82 \cdot \frac{0,086}{7,141} = 0,202 \text{ тис. чол.}$$

Результати розрахунків наведені в табл. 4.14.

Таблиця 4.14 – Матриця кореспонденцій на другій ітерації, тис. чол.

Номер району відправлення	Номер району прибуття										$\sum_i H_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	5,012	0,202	2,426	0,172	0,791	0,132	2,841	0,838	1,623	2,783	16,82
2	0,016	0,176	0,134	0,016	0,033	0,026	0,218	0,458	0,294	1,169	2,54
3	0,158	0,109	10,84	0,158	1,073	0,108	1,561	0,628	0,808	1,127	16,57
4	0,078	0,089	1,36	0,403	0,233	0,103	2,078	0,528	0,712	0,786	6,37
5	0,086	0,027	1,184	0,036	1,062	0,028	0,453	0,153	0,241	0,33	3,57
6	0,066	0,169	0,814	0,114	0,199	0,423	0,987	1,413	1,57	1,376	7,13
7	0,249	0,246	2,153	0,41	0,573	0,18	13,85	0,89	3,45	2,72	24,72
8	0,055	0,372	0,642	0,082	0,14	0,186	0,63	3,188	0,86	2,255	8,41
9	0,193	0,432	1,476	0,117	0,407	0,382	4,546	1,542	10,23	4,64	23,96
10	0,099	0,533	0,646	0,064	0,169	0,098	1,122	1,255	1,454	11,64	17,08
$H'_j = \sum_i H_{ij}$	5,982	2,355	21,67	1,572	4,68	1,666	28,28	10,89	21,24	28,82	—
$\Delta_j, \%$	6,8	1,87	3,2	1,7	2,5	4,1	3,9	8,68	2,1	2,6	—

Перевіримо умови балансу матриці кореспонденцій. Наприклад,

$$\Delta_1 = \frac{|H'_1 - H_1|}{H_1} \cdot 100 = \frac{|5,982 - 5,6|}{5,6} \cdot 100 = 6,8; \quad \Delta_2 = \frac{|2,355 - 2,4|}{2,4} \cdot 100 = 1,87.$$

Результати розрахунків занесені у відповідний рядок табл. 4.14.

Розподіл кореспонденцій по транспортних районах на другій ітерації задовольняє умові (4.10), тому на цьому розрахунок матриці кореспонденцій завершуємо.

6 Висновок.

Запитання для самоперевірки

1. Обґрунтувати, чим відрізняється кореспонденція міського населення від пасажиропотоку?
2. Що таке рухомість міського населення. Назвати фактори, які впливають на рухомість?
3. Дати назву й охарактеризувати складові етапи принципу, який покладено в основу моделей розрахунку матриці кореспонденцій?
4. Що таке транспортний район, чим він характеризується? За якими принципами формуються транспортні райони міста? Як визначити центр транспортного району для змішаного, житлового та промислового районів?
5. Яка ідея транспортного розрахунку методом взаємних кореспонденцій?
6. Які фактори враховують ймовірні моделі розрахунку взаємних кореспонденцій? Чому гравітаційну модель відносять до ймовірних моделей?
7. Навести математичний вираз і пояснити сенс гравітаційної моделі розрахунку матриці кореспонденцій за відправленням з i -х транспортних

районів, за прибуттям в j -ті транспортні райони? У зв'язку з яким фактором гравітаційна модель отримала таку назву?

8. Назвати переваги й недоліки ймовірних моделей розрахунку матриці кореспонденцій?

9. Пояснити поняття “трудова” й “селітебна” ємність транспортного району?

10. Що таке баланс матриці кореспонденцій, як його виконують? Від чого залежить відхилення від умови балансу матриці кореспонденцій?

11. Яке припущення приймається при визначенні обсягу транспортних районів за прибуттям?

12. Від чого залежить трудність сполучення між транспортними районами? Як її розраховують?

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни
«Основи теорії транспортних процесів та систем» (для студентів 4 курсу усіх
форм навчання спеціальності 275 «Транспортні технології»)

Укладачі: Ю. Я. Вовк, В.О. Дзюра, П.В. Попович, Вовк І.П., Цьонь О.П.,
Шевчук О.С.

План 2016

Підп. до друку 05.09.16	Формат 60 84 1/16	Папір офсетний
Друк на лазерному принтері.	Обл.—вид. арк. 2,5	
Тираж 100 прим.	Замовл. №	Ціна договірна

46001, м. Тернопіль, вул. Б. Хмельницького, 12.
ТОВ «СтереоАрт»